

ISBN 978 - 979 - 028 - 021 - 2

PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

Tema:

Matematika untuk Semua:

**Kontribusi Matematika dan Pendidikan Matematika untuk
Membangun Karakter Bangsa**

Surabaya, 20 Juni 2009

Diselenggarakan oleh:

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Surabaya



**PENERBIT
UNESA UNIVERSITY PRESS
ANGGOTA IKAPI**

MENENTUKAN PRESENTASI YANG LAIN SUATU GROUP DENGAN MEMBANGUN SUBGROUP FUZZY*

R.SULAIMAN ✓

Jurusan Matematika- FMIPA- Universitas Negeri Surabaya
sulaimanraden@yahoo.com

Abstrak: Pada tulisan ini pertama sekali akan diuraikan definisi dasar tentang group bebas, presentasi dari suatu group, subgroup fuzzy dan transformasi Tietze beserta contoh-contohnya. Selanjutnya akan diuraikan cara menentukan presentasi lain dari suatu group dengan membangun subgroup fuzzy dari group itu. Disamping itu dengan menggunakan transformasi Tietze dapat ditunjukkan bahwa presentasi itu adalah ekuivalen, dalam arti bahwa yang satu dapat diperoleh dari yang lain dengan melakukan transformasi Tietze sebanyak hingga.

Kata kunci: group bebas, presentasi dari group, generator, relasi, transformasi tietze.

A. Pengantar

Group Bebas

Misalkan I adalah himpunan indeks, $X = \{x_i | i \in I\}$ adalah himpunan simbol (alphabet), $X^{-1} = \{x_i^{-1} | i \in I\}$ adalah himpunan berasingan dengan X dan $S = X \cup X^{-1}$. Kita definisikan S^* sebagai himpunan dari semua barisan hingga dari symbol-symbol di S , termasuk barisan kosong. Anggota dari S^* disebut dengan *kata* atas S . Definisikan relasi $\prec$ pada S^* sebagai berikut.

$\forall x, y \in S^*, x \prec y$ jika dan hanya jika x dapat diperoleh dari y dengan melakukan sebanyak hingga “insersi” dan/atau penghapusan subkata berbentuk $x_i x_i^{-1}$ atau $x_i^{-1} x_i$, dengan $i \in I$. Dapat kita tunjukkan bahwa $\prec$ adalah relasi ekuivalensi pada S^* .

Kata yang tidak memuat subkata berbentuk $x_i x_i^{-1}$ atau $x_i^{-1} x_i$ disebut *kata tereduksi*.

Misalkan $[\alpha]$ menotasikan klas ekuivalensi yang memuat $\alpha \in S^*$. Misalkan $W = \{[\alpha] | \alpha \in S^*\}$. Definisikan operasi biner pada W sebagai berikut:

$\forall [\alpha], [\beta] \in W, [\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$. Dapat kita tunjukkan bahwa W dengan operasi itu membentuk group. Group itu disebut *group bebas* atas X dan dinotasikan dengan $F(X)$.

Proposisi 1. Setiap group adalah isomorfik dengan suatu group bebas.

Bukti. Diberikan sebarang group G . Misalkan X adalah generator dari G . Misalkan pula $\mu: F(X) \rightarrow G$ perluasan dari "inklusi" $\eta: X \rightarrow G$, maka $\text{Im}(\mu) = G$, karena $G = \langle X \rangle$. Jika $K = \text{Ker}(\mu)$, maka berdasar teorema isomorfisma kita peroleh $G = \text{Im}(\mu) \cong F(X)/K$.

B. Presentasi dari Group

Teorema 1. Misalkan $B = \{g_i | i \in I\}$ membangun group G dan misalkan $X = \{x_i | i \in I\}$ adalah himpunan alphabet, maka fungsi $m: X \rightarrow B$ dengan $m(x_i) = g_i, \forall x_i \in X$ memperluas suatu epimorfisma $\bar{m}(x): F(X) \rightarrow G$ dengan $\bar{m}([x]) = m(x), \forall x \in X$.

Bukti: [lihat John Mordeson, Kiran R. Bhutani, A Rosenfeld : 2005]

Definisi 1. Anggota-anggota X (pada teorema 1) disebut "*generator pendefinisian*" dari G . Dengan teorema isomorfisma group kita dapatkan G isomorfik dengan $F(X)/\text{Ker}(\bar{m})$. Dengan demikian anggota-anggota group G dapat ditentukan ("up to isomorphism") dengan mengidentifikasi anggota-anggota X dan kernel dari $\bar{m}$. $\text{Ker}(\bar{m})$ dapat diidentifikasi dengan mengambil subset S dari $\text{Ker}(\bar{m})$ yang "normal closure"-nya adalah $\text{Ker}(\bar{m})$. Misalkan R adalah himpunan semua kata tereduksi di S , maka R disebut "*relasi pendefinisian*" dari group G . Group $\langle X, R \rangle$ disebut dengan "*presentasi dari G* ".

Group $G = \langle X | R \rangle$ disebut *dipresentasikan secara hingga* jika X dan R adalah himpunan finit.

Seringkali R pada $\langle X | R \rangle$ ditulis sebagai kesamaan $R = e$, artinya $\{r = e | r \in R\}$. Relasi pendefinisian kadang kala berbentuk " $\alpha = \beta$ " dengan $\alpha, \beta \in F(X)$ untuk menyatakan relator $\alpha\beta^{-1}$.

Contoh 1: $G = \langle a, b | a^3, b^2, a^{-1}b^{-1}ab \rangle$ adalah presentasi dari group berorder 6.

$X = \{a, b\}$ adalah generator and $R = \{a^3, b^2, a^{-1}b^{-1}ab\}$ adalah relasi.

Masing-masing relator mempunyai arti $a^3 = e, b^2 = e, a^{-1}b^{-1}ab = e$. Relator terakhir ekuivalen dengan $ab = ba$.

Dengan menggunakan relasi itu, kita peroleh G sebagai berikut.

$$G = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$$

G isomorfik dengan Z_6 . Seringkali kita katakan bahwa

$\langle a, b | a^3, b^2, a^{-1}b^{-1}ab \rangle$ adalah presentasi dari Z_6 .

Contoh 2: $G = \langle s, t, u | s^2, s^{-1}t^2, t^{-1}u^3 \rangle$

adalah presentasi dari group berorder 12.

G isomorfik dengan Z_{12} .

$G = \langle s, t, u \mid s^2, s^{-1}t^2, t^{-1}u^3 \rangle$ adalah presentasi dari Z_{12} .

Contoh 3: $\langle x, y \mid x^4, y^2, (xy)^2 \rangle$ adalah presentasi dari group dihedral berorder 8.

Proposisi 2. Setiap group mempunyai presentasi.

Bukti. Misalkan G adalah sebarang group, $X \subseteq G$ adalah generator dari G dan $\mu: F(X) \rightarrow G$ adalah homomorfisma seperti pada proposisi 1. Maka $G \cong \langle X \mid \text{Ker}(\mu) \rangle$.

C. Transformasi Tietze

Berikut ini adalah transformasi Tietze.

Let $P = \langle X \mid R \rangle$ adalah presentasi dari suatu group.

T1

Jika S dapat diperoleh dari elemen R , maka masukkan S menjadi relator.

$T2 = (T1)^{-1}$

T3

Jika K adalah kata pada X dan y tidak di X , maka masukkan y ke dalam himpunan generatort dan masukkan $y^{-1}K$ atau $y = K$ ke dalam himpunan relasi.

$T4 = (T3)^{-1}$

Proposisi 3: Diberikan dua presentasi finit dari suatu group yang sama, maka yang satu dapat diperoleh dari yang lain dengan melakukan transformasi Tietze sebanyak hingga.

Bukti : [lihat : D.L. Johnson]

Contoh 6:

Dengan transformasi Tietze akan ditunjukkan bahwa $\langle a, b \mid a^3, b^2, a^{-1}b^{-1}ab \rangle$ dapat diperoleh dari $\langle t \mid t^6 \rangle$.

$\langle t \mid t^6 \rangle$

$\langle a, b \mid a^2, b^3, a^{-1}b^{-1}ab \rangle$

$$\langle t | t^6 \rangle \xrightarrow{T_3} \langle t, a : t^6, a = t^3 \rangle$$

$$a = t^3, t^6 = 1 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$\xrightarrow{T_3} \langle t, a, b : t^6, a = t^3, b = t^2 \rangle$$

$$b = t^2, t^6 = 1 \Rightarrow b^3 = 1$$

$$\xrightarrow{T_1} \langle t, a, b : t^6, a = t^3, b = t^2, a^2 \rangle$$

$$b = t^2, t^6 = 1 \Rightarrow b^3 = 1$$

$$\xrightarrow{T_1} \langle t, a, b : t^6, a = t^3, b = t^2, a^2, b^3 \rangle$$

$$\langle t, a, b : t^6, a = t^3, b = t^2, a^2, b^3 \rangle$$

$$a = t^3, b = t^2 \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} = 1$$

$$\xrightarrow{T_1} \langle t, a, b : t^6, a = t^3, b = t^2, a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

Sekarang kita mempunyai dua generator baru a dan b dan tiga relator. Sehingga kita dapat memulai dengan menghapus generator dan relator yang tidak diperlukan.

$$\langle t, a, b : t^6, a = t^3, b = t^2, a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

$$a = t^3, a^2 = 1 \Rightarrow t^6 = 1$$

$$\xrightarrow{T_2} \langle t, a, b : a = t^3, b = t^2, a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

$$a = t^3, b = t^2 \Rightarrow t = ab^{-1}$$

$$\xrightarrow{T_4} \langle a, b : a = (ab^{-1})^3, b = (ab^{-1})^2, a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

$$\langle a, b : a = (ab^{-1})^3, b = (ab^{-1})^2, a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

$$a^2 = 1, b^3 = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow a = (ab^{-1})^3$$

$$\xrightarrow{T2} \langle a, b : b = (ab^{-1})^2, a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

$$a^2 = 1, b^3 = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow b = (ab^{-1})^2$$

$$\xrightarrow{T4} \langle a, b : a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

Contoh 7: Dengan transformasi Tietze, akan ditunjukkan bahwa $\langle a, b | a^2, b^5, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ dapat diperoleh dari $\langle t | t^{10} \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle t : t^{10} \rangle &\xrightarrow{T3} \langle t, a : t^{10}, a = t^5 \rangle; \\ a = t^5, t^{10} = 1 &\Rightarrow a^2 = 1 \\ &\xrightarrow{T1} \langle t, a : t^{10}, a = t^5, a^2 \rangle \\ &\xrightarrow{T3} \langle t, a, b : t^{10}, a = t^5, a^2, b = t^2 \rangle; & b = t^2, t^{10} = 1 \Rightarrow b^5 = 1 \\ &\xrightarrow{T1} \langle t, a, b : t^{10}, a = t^5, a^2, b = t^2, b^5 \rangle; & a = t^5, b = t^2 \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} = 1 \\ &\xrightarrow{T1} \langle t, a, b : t^{10}, a = t^5, a^2, b = t^2, b^5, aba^{-1}b^{-1} \rangle; & a^2 = 1, a = t^5 \Rightarrow t^{10} = 1 \\ &\xrightarrow{T2} \langle t, a, b : a = t^5, a^2, b = t^2, b^5, aba^{-1}b^{-1} \rangle; & a = t^5, b = t^2 \Rightarrow t = ab^{-2} \\ &\xrightarrow{T4} \langle a, b : a = (ab^{-2})^5, a^2, b = (ab^{-2})^2, b^5, aba^{-1}b^{-1} \rangle; \\ & & a^2 = 1, b^5 = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow a = (ab^{-2})^5 \\ &\xrightarrow{T2} \langle a, b : a^2, b = (ab^{-2})^2, b^5, aba^{-1}b^{-1} \rangle; \\ & & a^2 = 1, b^5 = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow b = (ab^{-2})^2 \\ &\xrightarrow{T2} \langle a, b : a^2, b^5, aba^{-1}b^{-1} \rangle \bullet \end{aligned}$$

Contoh 8: Perhatikan group

$$T = \langle x, y, z : x = yzy^{-1}, y = zxz^{-1}, z = xyx^{-1} \rangle.$$

Dengan menggunakan dua relator yang pertama untuk mengeliminasi z , kita peroleh

$$\begin{aligned} x &= y(xy x^{-1})y^{-1}, y = (xy x^{-1})x(xy^{-1}x^{-1}) \\ \Leftrightarrow xyx &= yxy, yxy = xyx \end{aligned}$$

Kita perhatikan bahwa dua relator yang pertama adalah ekuivalen dan kita peroleh group

$$B = \langle x, y : xyx = yxy \rangle.$$

Dapat kita tunjukkan bahwa $\langle s, t, u : s^2, s^{-1}t^2, t^{-1}u^3 \rangle$ dan $\langle b, c : b^3, b^{-1}c^4 \rangle$ keduanya adalah presentasi dari Z_{12} .

$\langle x, y : x^4, y^2, (xy)^2 \rangle$, $\langle w, x, y, z : w^{-1}xy, z^4, y^2, x^{-1}z^2, z^{-1}y^{-1}z^3y \rangle$,
 $\langle y, z, t : y^{-1}zt, z^4, t^2, z^{-1}t^{-1}z^3t \rangle$, semuanya adalah presentasi dari group dihedral berorder 8.

D. Subgroup fuzzy

Definisi 2. (Yunjie Zhang). Misalkan G adalah group. Sebarang fungsi $\mu : G \rightarrow [0, 1]$ disebut "*subset fuzzy*" dari G .

Subset fuzzy μ dari G disebut subgroup fuzzy dari G jika memenuhi,

$$(1) \mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \forall x, y \in G,$$

$$(2) \mu(x^{-1}) \geq \mu(x), \forall x \in G,$$

Jika μ subgroup fuzzy dari G dan e adalah elemen identitas di G , maka :

$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(x^{-1})\}, \forall x \in G$$

$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(x)\}, \forall x \in G$$

$$\mu(e) \geq \mu(x), \forall x \in G.$$

Contoh 9: Perhatikan group $\langle Z_4, +_{\text{mod } 4} \rangle$. $\mu : Z_4 \rightarrow [0, 1]$ sebagai berikut:

$$\mu(0) = 1, \mu(1) = \mu(3) = 0.4, \mu(2) = 0.6.$$

μ merupakan subgroup fuzzy dari Z_4 .

Contoh 10: Diketahui $G = (R \setminus \{0\}, \times)$ merupakan group. Definisikan pemetaan

$\mu : R \setminus \{0\} \rightarrow [0, 1]$ sebagai berikut :

$$\mu(x) = \begin{cases} t_0, & x = 1 \\ t_1, & x \neq 1 \end{cases}, 0 \leq t_1 \leq t_0 \leq 1.$$

μ adalah subgroup fuzzy dari G .

Definisi 3: [John Mordeson, Kiran R. Bhutani, A Rosenfeld]

Misalkan μ adalah *subgroup fuzzy* dari G dan misalkan $J \subseteq [0, 1]$. Koleksi $\{B_i | i \in J\}$ dari himpunan tak kosong "*subset-subset*" dari G_p disebut *membangun μ* jika memenuhi kondisi berikut:

(1) $\mu(e) \in J$ dan $e_{\mu(e)} \in B_{\mu(e)}$, dengan e adalah elemen identitas dari G .

(2) Untuk setiap "fuzzy singleton" $x_i \in G_p$ dan setiap $i \in J, x_i \in B_i$ menyebabkan $t = \mu(x) = i$.

(3) Untuk semua $x \in G$, ada sebanyak hingga $x_1, x_2, \dots, x_k \in \text{foot}$
 $(\cup_{i \geq \mu(x)} B_i)$ sedemikian hingga $x = \prod_{j=k}^k x_j^{\varepsilon(j)}$, dengan $\varepsilon(j) \in \{1, -1\}$.

Teorema 2. Misalkan $\{B_i | i \in J\}$ adalah pembangkit subgroup fuzzy ν dari G . Misalkan kondisi berikut dipenuhi:

(1) $\{X_i | i \in J\}$ adalah koleksi saling lepas dari himpunan-himpunan simbol sedemikian hingga untuk semua $i \in J$, ada bijeksi $m_i : X_i \rightarrow B_i$.

(2) $X = \cup_{i \in J} X_i$, dan $m : X \rightarrow G$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh $m(x) = \text{foot}(m_i(x))$, dengan $x \in X_i$,

maka ada epimorfisma yang tunggal $h : F(X) \rightarrow G$ sedemikian hingga memenuhi pernyataan berikut,

(3) $h([x]) = m(x)$ untuk semua $x \in X$

(4) $h(f(X; T, t)) = v$, dimana $T = \{v(m(x)) | x \in X\}$ dan $t = v(e)$.

Bukti: [Lihat : Murdeson]

Presentasi dari Subgroup Fuzzy

Misalkan μ adalah fuzzy subgroup dari G dan misalkan N adalah subgroup normal dari G . Fuzzy subset μ_N dari G/N dengan $\mu_N(xN) = \max\{\mu(y) | y \in xN\}$ adalah fuzzy subgroup dari G/N . μ_N kita sebut pembagian μ oleh N .

Misalkan ν adalah "subgroup fuzzy" dari G dan misalkan $\{B_i | i \in J\}$ adalah pembangkit ν . Ada koleksi $\{X_i | i \in J\}$ dari himpunan simbol-simbol dan ada koleksi dari fungsi-fungsi $\{m_i : X_i \rightarrow B_i | i \in J, \text{kondisi (1) dan (2) teorema 2 dipenuhi}\}$.

μ_N dan ν isomorfik [bukti lihat : John Mordeson, Kiran R. Bhutani, A Rosenfeld]

Oleh karena itu, mengidentifikasi subgroup fuzzy ν dari G (up to isomorphism) dapat diidentifikasi $\{X_i | i \in J\}$ dan $N = \text{Ker}(h)$. N dapat diidentifikasi dengan menggunakan subset S dari N sehingga "normal closure"-nya adalah N . Misalkan R adalah himpunan yang anggotanya adalah merupakan anggota N yang tereduksi, maka ν dapat dispesifikasi dengan $\langle X_i | i \in J, R \rangle$. Pasangan $\langle X_i | i \in J, R \rangle$ ini disebut dengan "presentasi" dari ν .

Karena $F(X)/N$ (domain μ_N) isomorfik dengan G (domain ν) maka presentasi dari subgroup fuzzy ν menghasilkan presentasi dari G .

Dengan demikian, setiap membuat fuzzy subgroup dari group G kemudian kita cari presentasinya maka kita akan menghasilkan presentasi dari group G .

Contoh 11 :

Misalkan subgroup fuzzy ρ dari Z_{12} sebagai berikut:

$$\forall x \in Z_{12}, \rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x = 0 \text{ atau } x = 6 \\ \frac{1}{2} & \text{jika } x = 3 \text{ atau } x = 9 \\ \frac{1}{3} & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Kita akan menentukan presentasi dari ρ .

$$J = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}.$$

Kita bentuk koleksi pembangun ρ yaitu $\{B_i | i \in J\}$ dan koleksi $\{X_i | i \in J\}$ yang memenuhi teorema 2.

$$B_1 = \{0_1, 6_1\}, X_1 = \{z, s\}$$

$$B_{1/2} = \{3_{1/2}\}, X_{1/2} = \{t\}$$

$$B_{1/3} = \{1_{1/3}\}, X_{1/3} = \{u\}$$

Untuk setiap $i \in J, m_i : X_i \rightarrow B_i$ dengan

$$m_1(z) = 0_1, m_1(s) = 6_1$$

$$m_1(z) = 0_1, m_1(s) = 6_1$$

$$m_{\frac{1}{2}}(t) = 3_{\frac{1}{2}} \text{ dan } m_{\frac{1}{3}}(u) = 1_{\frac{1}{3}}$$

Misalkan $F(X)$ adalah group bebas pada $X = \cup_{i \in J} X_i$.

Koleksi $\{B_i | i \in J\}$ merupakan pembangun ρ . Berdasarkan teorema 2, maka ada homomorfisma yang tunggal sedemikian hingga $F(X)/\ker(h) \approx Z_{12}$. Kernel dari h memberikan relator dari fuzzy presentasi. Berdasarkan (3) teorema 2 menghasilkan relasi,

$$h(z) = 0, h(s) = 6, h(t) = 3 \text{ dan } h(u) = 1.$$

Akibatnya kita peroleh relasi,

$$z = e, s^2 = e, s = t^2, t = u^3.$$

Jadi subgroup fuzzy ρ mempunyai presentasi

$$\langle z_1, s_1, t_{\frac{1}{2}}, u_{\frac{1}{3}} | z = e, s^2 = e, s = t^2, t = u^3 \rangle.$$

Contoh 12:

Kita bangun subgroup fuzzy ρ dari Z_{12} yang berbeda dengan pada contoh 11, yaitu sebagai berikut:

$$\forall x \in Z_{12}, \rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in \{0, 4, 8\} \\ \frac{1}{2}, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Kita akan menentukan presentasi dari ρ .

$$J = \{1, \frac{1}{2}\}$$

$$B_1 = \{0_1, 4_1\} ; X_1 = \{a, b\}$$

$$B_{\frac{1}{2}} = \{1_{\frac{1}{2}}\} ; X_{\frac{1}{2}} = \{c\}$$

$$m_i : X_i \rightarrow B_i \text{ dengan}$$

$$m_1(a) = 0_1 ; m_1(b) = 4_1$$

$$m_{\frac{1}{2}}(c) = 1_{\frac{1}{2}}$$

$\{B_i\}$ adalah penjana ρ .

Berdasarkan teorema 2, maka ada homomorfisma yang tunggal sedemikian hingga $F(X)/\ker(h) \approx Z_{12}$. Kernel dari h memberikan relator dari fuzzy presentasi.

Berdasarkan (3) teorema 2 menghasilkan relasi,

$$h(a) = 0; h(b) = 4; h(c) = 1$$

Diperoleh relasi:

$$a = e; b^3 = e; c^4 = b$$

Jadi presentasi dari ρ adalah,

$$\langle a_1, b_1, c_{1/2} \mid a = e; b^3 = e; c^4 = b \rangle$$

Contoh 13:

Kita bangun subgroup fuzzy ρ dari Z_{12} yang berbeda dengan pada contoh 11 dan contoh 12, yaitu sebagai berikut:

$$\forall x \in Z_{12}, \quad \rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in \{0, 6\} \\ \frac{1}{2}, & \text{jika } x \in \{2, 4, 8, 10\} \\ \frac{1}{3} & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Kita akan menentukan presentasi dari ρ .

$$J = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$$

$$B_1 = \{0_1, 6_1\} \quad ; X_1 = \{a, b\}$$

$$B_{1/2} = \{2_{1/2}\} \quad ; X_{1/2} = \{c\}$$

$$B_{1/3} = \{1_{1/3}\} \quad ; X_{1/3} = \{d\}$$

$$m_i : X_i \rightarrow B_i \text{ dengan}$$

$$m_1(a) = 0_1; m_1(b) = 6_1$$

$$m_{1/2}(c) = 2_{1/2}$$

$$m_{1/3}(d) = 1_{1/3}$$

$[B]$ adalah penjana ρ .

Berdasarkan teorema 2, maka ada homomorfisma yang tunggal sedemikian hingga $F(X)/\ker(h) \approx Z_{12}$. Kernel dari h memberikan relator dari fuzzy presentasi.

Berdasarkan (3) teorema 2 menghasilkan relasi,

$$h(a) = 0; h(b) = 6; h(c) = 2; h(d) = 1$$

Diperoleh relasi:

$$a = e; b^2 = e; c^6 = e = b^2; d^{12} = e = c^6$$

Atau:

$$a = e; b^2 = e; c^3 = b; d^2 = c$$

Jadi presentasi dari ρ adalah,

$$\langle a_1, b_1, c_{\frac{1}{2}}, d_{\frac{1}{3}} \mid a = e; b^2 = e; c^3 = b; d^2 = c \rangle$$

Dengan memperhatikan hasil pada contoh 11, 12 dan 13, kita peroleh bahwa $\langle s, t, u \mid s^2 = e, s = t^2, t = u^3 \rangle$, $\langle b, c \mid b^3 = e; c^4 = b \rangle$ dan $\langle b, c, d \mid b^2 = e; c^3 = b; d^2 = c \rangle$ ketiganya merupakan presentasi dari Z_{12} .

Dengan Transformasi Tietze dapat kita tunjukkan bahwa ketiganya adalah ekuivalen dalam arti yang satu dapat diperoleh dari yang lain dengan melakukan transformasi Tietze sebanyak hingga.

Daftar Referensi:

- [1] Brown, R; Huebschmann, ed. 1982. *Identities among relations* Edited by 48, *Two-dimensional homotopy theory*: LMS Lecture Note Series.
- [2] I, N.Herstein, ed. 1975. *Topics in Algebra*. Second ed. New York: John Wiley & Sons.
- [3] Johnson, D.L, ed. 1997. *Presentations of Groups*. Second ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] Mordeson, John; R.Buthani, Kiran; Rosenfeld, Azriel. 2005. Free Fuzzy Subgroups and Fuzzy Subgroup Presentations. *Fuzzy Group Theory* 182:119-138.
- [5] Stephen, J Pride;. 1990. *Identities Among Relations of Group Presentations*. Glasgow.
- [6] Sukhamay Kundu.1998. The correct form of a recent result on level-subgroup of a fuzzy group. *Fuzzy set and system*. Vol 97.

- [7] Yunjie Zhang. 2001. Some properties of fuzzy subgroup. Fuzzy set and system. Vol 119.
- [8] Xuehai Yuan, Cheng Zhang, Yonghong Ren. 2003. Generalized fuzzy group and many-valued implications. Fuzzy set and system. Vol.138

METODE LIKELIHOOD LOKAL DENGAN PEMBOBOT KERNEL PADA REGRESI NONPARAMETRIK DENGAN RESPON NORMAL

Toha Saifudin

Departemen Matematik, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga

ABSTRAK

Model regresi nonparametrik berbentuk $y_i = s(x_i) + \varepsilon_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dengan $s(x_i)$ adalah fungsi halus. Berbagai macam metode pendugaan model regresi nonparametrik telah dikembangkan oleh para peneliti. Kebanyakan metode pendugaan yang digunakan merupakan metode bebas distribusi. Dalam paper ini kami bertujuan untuk mendapatkan penduga model regresi nonparametrik menggunakan metode berbasis distribusi yaitu likelihood lokal dengan pembobot kernel yang diterapkan pada respon berdistribusi normal.

Kata kunci : regresi nonparametrik, fungsi halus, likelihood lokal, pembobot kernel.

PENDAHULUAN

Penelitian tentang analisis regresi nonparametrik mengalami perkembangan yang pesat. Hal tersebut disebabkan metode nonparametrik tidak membutuhkan asumsi mengenai bentuk dari fungsi regresi, dan memberikan fleksibilitas pada data sampel untuk mencari bentuk fungsional yang dapat menggambarkan data dengan baik. Secara umum model regresi nonparametrik antara peubah respon dengan satu prediktor dapat dinyatakan sebagai

$$y_i = s(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

dengan y_i adalah nilai peubah respon Y , x_i adalah nilai peubah prediktor X , ε_i adalah galat model dengan mean 0 dan varians σ^2 , dan $s(x_i)$ adalah fungsi regresi yang bentuknya tidak diketahui (Hardle, 1990).